差分方程式の解の安定性について(関数方程式の近似解法第2次研究集会報告集)

AUTHOR(S):

杉山, 昌平

数理解析研究所講究録
71 巻 1969 年 59-74

差分方程式の解の安定性について

早大 理工　杉 山 昌 平

1. 初期値問題

点 t_0+k ($k=0,1,\cdots$) の集合を I_{t_0} とする．関数 $f(t,x)$ は $t\in I_{t_0}$, $|x|<a$ で定義されているとき初期値問題

$$x(t_0)=x_0,$$

(1.1) $$x(t+1)=f(t,x(t)),\qquad t\in I_{t_0}$$

の解が I_{t_0} において存在するものとし，その解を $x(t,t_0,x_0)$ で表わすことにする．ただし，x, f はいずれも n 次元ベクトルであって，そのノルムは適当に，例えば，成分の絶対値の最大なものとして定義する．

注．t が連続変数のときは区間 $t_0\leqq t<t_0+1$ において初期関数をあらかじめ与えておき，以下の議論を少しく修正することによって類似の結果が成立するが，ここではもっぱら t が離散変数である場合を論じることにする．

2. 安定性の定義

系(1.1)において t に関して一様に $f(t, 0)=0$ とし，微分方程式の場合とまったく同様に安定性の定義をつぎのように行なう．

定義1．任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な $\delta(\varepsilon, t_0)>0$ が存在し，$|x_0|<\delta(\varepsilon, t_0)$ のとき $|x(t, t_0, x_0)|<\varepsilon$，$t\in I_{t_0}$ が成立するならば，(1.1)の零解は安定であるという．

定義2．任意の $\varepsilon>0$ および t_0 に対して $\delta(\varepsilon)>0$ が存在し，$|x_0|<\delta(\varepsilon)$ のとき $|x(t, t_0, x_0)|<\varepsilon$，$t\in I_{t_0}$ が成立するならば，(1.1)の零解は一様安定であるという．

定義3．零解が安定かつ $\delta_0(t_0)>0$ が存在して $|x_0|<\delta_0(t_0)$ ならば

$$\lim_{t\to\infty}|x(t, t_0, x_0)|=0$$

が成立するとき，その零解は漸近安定であるという．

定義4．零解が一様安定かつ δ_0，$T(\varepsilon)$ が存在して $|x_0|<\delta_0$，$t\geqq t_0+T(\varepsilon)$ のとき $|x(t, t_0, x_0)|<\varepsilon$ が成立するならば，その零解は一様漸近安定であるという．

3. 線形系

$n\times n$ 行列 $A(t)$ は $t\in I_{t_0}$ において定義され，かつ

$$\det A(t)\neq 0,\quad t\in I_{t_0}$$

であるとすれば，同次線形系

(3.1) $$x(t+1)=A(t)x(t)$$

は I_{t_0} において1次独立な n 個の解をもっている. 例えば, 1次独立な n 個の点をそれぞれ初期値にもつ n 個の解は I_{t_0} において1次独立である.

n 個の1次独立な解 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ から作られる $n\times n$ 行列

$$X(t)=(x_1(t)\cdots x_n(t)), \quad t\in I_{t_0}$$

を(3.1)に対応する基本行列といい, 関係

$$\left.\begin{aligned}&\det X(t)\neq 0,\\ &X(t+1)=A(t)X(t),\end{aligned}\right\} \quad t\in I_{t_0}$$

が成立する. 基本行列としてとくに $X(t_0)=E$ (単位行列)となるものをとり, 点 $x(s)$ から $x(t)$ への写像を $X(t,s)$ とすれば,

$$X(t,s)=X(t)X(s)^{-1}$$

が成立し, 解 $x(t,t_0,x_0)$ はつぎのように表わされる:

$$x(t,t_0,x_0)=X(t,t_0)x_0.$$

行列 $X(t,s)$ は Green関数と呼ばれることがあり,

$$X(t,s)X(s,\tau)=X(t,\tau),$$

$$X(t,t)=E, \qquad X(s,t)=X(t,s)^{-1},$$

$$X(t+1,s)=A(t)X(t,s)$$

を満足している.

非同次線形系

(3.2) $\quad x(t+1)=A(t)x(t)+f(t)$

において行列 $A(t)$ は前と同じ性質をもち，$f(t)$ は $t\in I_{t_0}$ において定義されているとする．微分方程式の場合と同様に，定数変化法を用いると (3.2) の解 $x(t,t_0,x_0)$ はつぎのように表わされる：

$$x(t,t_0,x_0)=X(t,t_0)x_0+\sum_{s=t_0}^{t-1}X(t,s+1)f(s),\quad t\in I_{t_0+1}.$$

ただし，$\sum$ は和分を定義するときに通常用いられる和を表わすものとし，つねに $\sum_{s=t_0}^{t_0-1}=0$ と約束する．

4．補助定理

補助定理1．$K(t)\geqq 0$，$t\in I_{t_0}$ のとき，

$$u(t)\leqq f(t)+\sum_{s=t_0}^{t-1}K(s)u(s),\qquad t\in I_{t_0+1}$$

ならば

(4.1) $$u(t)\leqq f(t)+\sum_{s=t_0}^{t-1}K(s)f(s)\prod_{\tau=s+1}^{t-1}(1+K(\tau)),\quad t\in I_{t_0+1}.$$

もし，$f(t)\geqq 0$ ならば

(4.2) $$u(t)\leqq f(t)+\sum_{s=t_0}^{t-1}K(s)f(s)\exp\left(\sum_{\tau=s+1}^{t-1}K(\tau)\right).$$

ただし，$\prod$ は差分方程式の解を積の形に表わすときに通常用いられる積を表わすものとし，$\prod_{\tau=t_0+1}^{t_0}=0$，$\sum_{\tau=t_0+1}^{t_0}=0$ と約束する．

系．正の定数 c に対して $f(t)\leqq c$ ならば

(4.3) $$u(t) \leqq c\,\exp\left(\sum_{s=t_0}^{t-1} K(s)\right), \qquad t \in I_{t_0+1}.$$

補助定理2. 系(3.1)において解 $x(t) \equiv 0$ が一様漸近安定ならば，不等式

(4.4) $$|x(t, t_0, x_0)| \leqq B e^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad t \in I_{t_0}$$

を満足する正の定数 B, α が存在する.

証明 $$x(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)\,x_0$$

とすれば，一様漸近安定性から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|x_0| < \delta_0$ ならば

$$|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \quad t \geqq t_0 + T(\varepsilon)$$

が成立する．以下微分方程式の場合とまったく同様にして(4.4)が得られる．（文献[2]参照）

5. 摂動系

定理5.1. 系

(5.1) $$x(t+1) = A(t)x(t) + f(t, x(t))$$

において $\det A(t) \neq 0$, $t \in I_{t_0}$ とする．$f(t, x)$ は十分小さい c に対して不等式

$$|f(t, x)| \leqq c|x| \qquad (|x| < h)$$

を満足するものとする．(5.1)の第1近似

(5.2) $$y(t+1) = A(t)y(t)$$

の零解が一様漸近安定ならば(5.1)の零解もまた一様漸近安定である.

証明　非同次系の解の表示について

$$x(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \sum_{s=t_0}^{t-1} X(t, s+1) f(s, x(s, t_0, x_0)),$$

$t \in I_{t_0}$ が成立する．同次系の零解の一様漸近安定性から

$$|X(t, t_0)| \leqq B e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \in I_{t_0}$$

を満足する正の定数 B, α が存在する．したがって，$|x(t, t_0, x_0)| < h$ である限りつぎの評価が成立する：

$$|x(t, t_0, x_0)| \leqq |X(t, t_0)||x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} |X(t, s+1)||f(s, x(s, t_0, x_0))|$$

$$\leqq B e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} B e^{-\alpha(t-s-1)} c|x(s, t_0, x_0)|$$

ここで，

$$u(t) = |x(t, t_0, x_0)| e^{\alpha t}$$

とおけば上の不等式から

$$u(t) \leqq B u(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} B c e^{\alpha} u(s)$$

が成立する．補助定理 1，系から

$$u(t) \leqq B u(t_0) \exp\left(\sum_{s=t_0}^{t-1} B c e^{\alpha}\right)$$

$$\leqq B u(t_0) \exp\left(B c e^{\alpha}(t-t_0)\right).$$

したがって，

(5.3)　$$|x(t, t_0, x_0)| \leqq B|x_0| \exp\left(-(\alpha - Bce^{\alpha})(t-t_0)\right).$$

c を十分小さくとって

$$\alpha - Bce^{\alpha} > 0$$

となるようにし，さらに初期値については

$$B|x_0| < h$$

ならしめることにより不等式（5.3）がすべての $t \in I_{t_0}$ について成立するようにできる．よって，一様漸近安定（指数的に漸近安定）である．

定理 5.2. 系

(5.4) $\quad x(t+1) = A(t)x(t) + f(t, x(t))$

において

$$|f(t, x)| \leqq \beta(t)|x| \qquad (|x| < h),$$

$$\sum_{s=t_0}^{\infty} \beta(s) \leqq M \quad （有界）$$

とする．もし，$y(t+1) = A(t)y(t)$ の零解が一様漸近安定ならば（5.4）の零解もまた一様漸近安定である．

証明 前定理の証明と同様に

$$|X(t, t_0)| \leqq Be^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad t \in I_{t_0}$$

を満足する正の定数 B, α が存在する．前と同様の解の表示と定理の仮定から $|x(t, t_0, x_0)| < h$ である限りつぎの評価が成立する：

$$|x(t, t_0, x_0)| \leqq |X(t, t_0)||x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} |X(t, s+1)||f(s, x(s, t_0, x_0))|$$

$$\leqq Be^{-\alpha(t-t_0)}|x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} Be^{-\alpha(t-s-1)}\beta(s) \times |x(s, t_0, x_0)|.$$

前と同様に $u(t)=|x(t,t_0,x_0)|e^{\alpha t}$ とおけば上の不等式から

$$u(t) \leqq Bu(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} Be^{\alpha}\beta(s)u(s).$$

補助定理1，系および定理の仮定から

$$u(t) \leqq Bu(t_0)\exp\left(\sum_{s=t_0}^{t-1} Be^{\alpha}\beta(s)\right)$$

$$\leqq Bu(t_0)\exp(Be^{\alpha}M).$$

したがって，

$$|x(t,t_0,x_0)| \leqq BK|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad K\text{は定数}$$

が成立する．初期値を $BK|x_0|<h$ のようにとっておけば上の不等式はすべての $t\in I_{t_0}$ に対して成立する．よって，一様漸近安定である．

定理5.3. Aは定数行列とする．系

(5.5) $\qquad x(t+1)=(A+B(t))x(t)$

において $y(t+1)=Ay(t)$ の解は有界とする．もし，

$$\sum_{s=t_0}^{\infty}|B(s)|<\infty$$

ならば(5.5)の解もまた有界である([3])．

証明 $\quad x(t+1)=Ax(t)+B(t)x(t)$

とすれば

$$x(t,t_0,x_0)=X(t,t_0)x_0+\sum_{s=t_0}^{t-1}X(t,s+1)B(s)x(s,t_0,x_0).$$

仮定から $|X(t,t_0)|\leqq M$（有界）．よって，

$$|x(t,t_0,x_0)| \leqq M|x_0| + \sum_{s=t_0}^{t-1} M|B(s)||x(s,t_0,x_0)|$$

したがって，補助定理1，系から

$$|x(t,t_0,x_0)| \leqq M|x_0| \exp\left(M\sum_{s=t_0}^{t-1}|B(s)|\right).$$

よって，定理の仮定から解は有界である．

なお，(5.5)の零解は一様安定である．

6. Lyapunov関数

定理6.1. 関数$V(t,x)$は$t\in I_{t_0}$，$|x|<h$で定義され，xについては連続な関数であるとする．つぎの3条件が満足されるものとする：

(i) tについて一様に$V(t,0)=0$；

(ii) 関数$a(r)$は$0\leqq r<\infty$において連続，狭義の増加関数，$a(0)=0$であるとし，不等式

$$a(|x|) \leqq V(t,x)$$

が成立する；

(iii) $|x_0|<h$を満足するx_0を初期値にもつ(1.1)の解$x(t)$に対して

$$\Delta V(t,x(t)) \leqq 0, \quad t\in I_{t_0}$$

が成立する．

このとき，(1.1)の零解は安定である．

証明　$V(t_0,0)=0$かつ$V(t_0,x)$は$|x|<h$において連続であるから，任意の$\varepsilon>0$に対して適当な$\delta(\varepsilon,t_0)$

を選んで $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)\ (< h)$ に対して

$$V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$$

ならしめることができる．仮定 (ii), (iii) から

$$a(|x(t, t_0, x_0)|) \leqq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqq V(t_0, x_0) < a(\varepsilon).$$

$a(r)$ は狭義の増加関数だから上の不等式から

$$|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \quad t \in I_{t_0}$$

が成立する．したがって，(1.1) の零解は安定である．

定理 6.2. 関数 $V(t, x)$ は $t \in I_{t_0}$, $|x| < h$ において定義された関数でつぎの条件を満足するものとする：

(i) t について一様に $V(t, 0) = 0$；

(ii) 関数 $a(r)$, $b(r)$ は $0 \leqq r < \infty$ において定義された連続関数で狭義の増加関数とし，$a(0) = b(0) = 0$，かつ不等式

$$a(|x|) \leqq V(t, x) \leqq b(|x|)$$

が成立する；

(iii) $|x(t)| < h$ を満足する任意の解に対して

$$\Delta V(t, x(t)) \leqq 0, \quad t \in I_{t_0}$$

が成立する．

このとき，(1.1) の零解は一様安定である．

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon))$ とおく．$|x_0| < \delta\ (< h)$ を満足する x_0 を初期値にもつ (1.1) の解 $x(t, t_0, x_0)$ に対して仮定 (iii) から

$$V(t,\ x(t,t_0,x_0)) \leqq V(t_0,x_0), \quad t \in I_{t_0}$$

が成立する．したがって，仮定(ii)およびδの選び方から

$$\begin{aligned} a(|x(t,t_0,x_0)|) &\leqq V(t,\ x(t,t_0,x_0)) \\ &\leqq V(t_0,x_0) \\ &\leqq b(|x_0|) \\ &< b(\delta) = b(b^{-1}(a(\varepsilon))) = a(\varepsilon). \end{aligned}$$

したがって，

$$|x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon, \quad t \in I_{t_0}$$

が成立し，(1.1)の零解は一様安定となる．

定理6.3. 関数$V(t,x)$は$t \in I_{t_0}$, $|x|<h$で定義され，xについて連続な関数とする．つぎの3条件が満足されるものとする：

(i) tについて一様に$V(t,0)=0$；

(ii) 関数$a(r)$は$0 \leqq r < \infty$で定義された連続関数であり，狭義の増加関数であり，$a(0)=0$，かつ不等式

$$a(|x|) \leqq V(t,x)$$

が成立する；

(iii) 関数$c(r)$は$0 \leqq r < \infty$で定義された連続関数であり，狭義の増加関数とし，$c(0)=0$とする．さらに，解$x(t,t_0,x_0)$に対して不等式

$$\Delta V(t,x(t,t_0,x_0)) \leqq -c\big(V(t,x(t,t_0,x_0))\big)$$

が成立する．

このとき，(1.1) の零解は漸近安定である．

証明　定理6.1 から零解は安定である．仮定(iii) から

$$\Delta V(t_0+m,\ x(t_0+m,\ t_0,\ x_0)) \leqq 0 \quad (m=0, 1, \cdots).$$

したがって，数列 $\{V(t_0+m,\ x(t_0+m,\ t_0,\ x_0))\}_{m=0}^{\infty}$ は単調減少である．以下 $V(m)=V(t_0+m,\ x(t_0+m,\ t_0,\ x_0))$ $(m=0, 1, \cdots)$ とおく．単調性から

$$\lim_{m\to\infty} V(m) = V_0 \geqq 0$$

が存在する．$V_0>0$ と仮定すれば $V(m) \geqq V_0 > 0$ であるから $c(r)$ の性質から

$$c(V(m)) \geqq c(V_0) > 0,$$

したがって，(iii) から

$$\Delta V(m) \leqq -c(V(m)) \leqq -c(V_0)$$

が成立する．この不等式から任意の m に対して

$$V(m) \leqq V(0) - m\,c(V_0)$$

となり，$m\to\infty$ とすれば $V(m)\to-\infty$ となって矛盾である．よって，$V_0=0$ が成立する．

いま，漸近安定でないと仮定すれば，任意の $\varepsilon>0$ および $|x_0|<\delta_0(t_0)$ を満足するいかなる初期値に対しても1つの増加数列 $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$，$m_k\to\infty\ (k\to\infty)$ が存在して

$$|x(t_0+m_k,\ t_0,\ x_0)| \geqq \varepsilon > 0 \quad (k_0 \leqq k < \infty)$$

が成立する.

一方, すでに証明したことから

$$a(|x(t_0+m, t_0, x_0)|) \leqq V(m) \to 0 \quad (m \to \infty)$$

であるから

$$a(|x(t_0+m, t_0, x_0)|) < a(\tfrac{\varepsilon}{2}),$$

すなわち,

$$|x(t_0+m, t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m_0 \leqq m < \infty)$$

が成立する. したがって,

$$\varepsilon < |x(t_0+m_k, t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\max(m_{k_0}, m_0) \leqq m_k < \infty)$$

となり矛盾である. よって, 零解は漸近安定である.

定理 6.4. 関数 $V(t, x)$ は $t \in I_{t_0}$, $|x| < h$ で定義された関数, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ は前に定義したものと同じ性質をもつ関数であり, つぎの2条件が成立するものとする:

(i) $a(|x|) \leqq V(t, x) \leqq b(|x|)$;

(ii) $\Delta V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqq -c(|x(t, t_0, x_0)|)$.

このとき, (1.1) の零解は一様漸近安定である.

7. 絶対安定 ([5])

差分方程式系

(7.1) $\quad x(t+1) = Ax(t) - b\varphi(\sigma(t)), \quad t \in I_0$

において, A, b は定数で

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ & \bigcirc & & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdots\cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(t) = c'x(t) \qquad (\,'\,\text{は転置を表わす}).$$

とする．φは実変数 σ の連続関数であって

(7.2) $\quad \varphi(0)=0, \quad 0 \leqq \sigma\varphi(\sigma) < \sigma^2 k, \quad k<\infty$

を満足するものとする．このとき，つぎの4条件を考える：

(i) n個のベクトル $b, Ab, \cdots, A^{n-1}b$ は1次独立である (completely controllable)；

(ii) n個のベクトル $c, A'c, \cdots, (A')^{n-1}c$ は1次独立である (completely observable)；

(iii) Aのすべての固有値 λ_i について

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i=1,\cdots,n);$$

(iv) 任意の実数 ω に対してつぎの不等式が成立する：

$$\frac{1}{k} + Re\left(c'(e^{i\omega}E - A)^{-1}b\right) \geqq 0.$$

定理 7.1. 条件 (i), (ii), (iii), (iv) が満足されるならば，つぎのような Lyapunov 関数 V が存在する：

(a) $\quad V(x) = x'Hx \quad$ (H は実，対称，正定値行列)；

(b) $\quad \Delta V(x) = -(\gamma\varphi(\sigma) + q'x)^2 - \varphi(\sigma)(\sigma - \frac{1}{k}\varphi(\sigma))$；

(c) $\quad x(t)=0$ のときにのみ $\Delta V(x(t))=0$.

この定理は(7.1)の絶対安定性，すなわち，すべての$x(0)=x_0$，(7.2)を満足するすべての関数φに対して

$$|x(t)|<\alpha|x_0|, \qquad \lim_{t\to\infty}|x(t)|=0$$

を証明するのに用いられる.

むすび. いままでに述べてきたことから推察されるように，常微分方程式の安定性に関する問題，諸定理についての方法，結果が極めて類似した形で示されることがわかり，ここでは説明しきれなかった他の多くの結果もまた同様にして得られる. tが連続変数の場合には，差分微分方程式あるいは関数微分方程式と同じように初期関数と適当なノルムを導入することによって類似の結果が得られることに注意しておく.

なお，文献[1]の結果が[4]に紹介されているが，定理の表現が曖昧であり，それは上にのべた定理6.3あるいは6.4の形に修正すべきものと思われる.

参考文献

[1] A. Bukowy, P. Vidal, et S. Wegrzyn: Sur la méthode directe de Ljapunov pour une équation aux différences finies. C.R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 4591–4592.

[2] A. Halanay: *Differential Equations. Stability, Oscillations, Time Lags.* Acad. Press, 1966.

[3] K.S. Miller: *Linear Difference Equations.* Benjamin, 1968.

[4] T.L. Saaty: *Modern Nonlinear Equations.* McGraw-Hill, 1967.

[5] G. Szegö and R. Kalman: *Sur la stabilité absolue d'un système d'équations aux différences finies.* C.R. Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 388–390.